Über windschiefe Kegelschnitte.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Hans Kössler
aus Magdeburg.

Halle a. S.
Buchdruckerei von Heinrich John.
1911.

Referent: Herr Professor Dr. A. Gutzmer.

Meinen lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544702_0041

Einleitung.

Im dritten Bande seiner „Lezioni di geometria differenziale“ behandelt Bianchi eine bestimmte Art von Transformationen, die es ermöglichen, aus einer Biegungsfläche einer Fläche zweiter Ordnung unendlich viel neue Flächen derselben Art herzuleiten. Bei der Betrachtung eines Grenzfalles[1]) kommt er dabei auf Kurven, die er als coniche distorte, windschiefe oder tordierte Kegelschnitte bezeichnet. Es handelt sich dabei um die Kurven, die bei der Abwicklung ihrer Tangentenfläche auf eine Ebene in einen Kegelschnitt übergehen. Bianchi nimmt jedoch an jener Stelle die Kurven bereits als gegeben an und benutzt sie nur, um auf sie seine Transformationstheorie anzuwenden, ohne über die Kurven als solche etwas auszusagen und ohne von ihnen explicite Gleichungen anzugeben. In der übrigen Literatur finden sich nur drei Stellen, an denen Spezialfälle der windschiefen Kegelschnitte, nämlich die windschiefe Parabel und der windschiefe Kreis erwähnt wird. Es geschieht dies bei Schell[2]), Pirondini[3]) und Cesàro[4]). Die beiden ersten zeigen — Schell geometrisch, Pirondini analytisch —, dass die Gratlinie der Polarfläche derjenigen Kurven, deren Krümmungsmittelpunktskurve eine geodätische Linie auf ihrer Polarfläche ist, bei der Abwicklung der Polarfläche auf eine Ebene in eine Parabel übergeht. (Bei Schell steht dabei versehentlich überall Direktrix anstatt Scheiteltangente.) Cesàro erwähnt zwei Eigenschaften der wind-

[1]) Luigi Bianchi, Lezioni di geometria differenziale III; Nota II. Sopra un caso limite delle trasformazioni $B_{\varkappa}$.

[2]) Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, S. 95.

[3]) Pirondini, Sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo de'sui centri di curvatura. Annali di Mat. (2) 17, 65—79.

[4]) Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie. S. 182.

schiefen Kreise, die speziell diesen, nicht aber allgemein den windschiefen Kegelschnitten zukommen, und zwar: 1. Die Schmiegungskugeln eines windschiefen Kreises sind alle unter sich gleich. 2. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte eines windschiefen Kreises ist ein zweiter windschiefer Kreis, der dieselbe Krümmung hat und eine Torsion, die im umgekehrten Verhältnis der Torsion des ersten Kreises variiert. Diese letzte Eigenschaft ist auch vorher schon von Bouquet gefunden.

In Band XVII des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung macht nun Herr Professor Dr. E. Salkowski, Charlottenburg, in einer Abhandlung: „Über eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven" auf diese Kurven aufmerksam. Auf diese Abhandlung verwies mich Herr Professor Dr. Gutzmer und veranlasste mich so, die folgenden Untersuchungen anzustellen, bei deren Durchführung mir auch Herr Professor Dr. E. Salkowski selbst wertvolle Ratschläge erteilte.

Im ersten Abschnitt der Arbeit sind mit Hilfe zweier verschiedener Methoden die Gleichungen der windschiefen Kegelschnitte aufgestellt, Jedoch gelingt dies nur nach der ersten Methode ganz allgemein. Hier erhält man:

$$x = \int \frac{\frac{dX}{dS}\, d\omega}{\sqrt{\varepsilon \sqrt{A^2 - 4B \sin(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega)}}^3},$$

$$y = \int \frac{\frac{dY}{dS}\, d\omega}{\sqrt{\varepsilon \sqrt{A^2 - 4B \sin(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega)}}^3},$$

$$z = \int \frac{\frac{dZ}{dS}\, d\omega}{\sqrt{\varepsilon \sqrt{A^2 - 4B \sin(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega)}}^3}.$$

(Über die Bedeutung der Grössen X, Y, Z, ω, α, ε siehe an der betreffenden Stelle, Seite 9—12). Doch lassen sich nach der zweiten Methode z. B. die Gleichungen der unter den windschiefen Kegelschnitten vorhandenen Schraubenlinien allgemein aufstellen, wobei man findet:

a) für die betreffenden windschiefen Ellipsen:

$$x = -\frac{a^2 b^2}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\sin(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{(a^2\cos^2 T + b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\cos(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{(a^2\cos^2 T + b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z = \frac{a^2 b^2 m}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{dT}{(a^2\cos^2 T + b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}};$$

b) für die betreffenden windschiefen Hyperbeln:

$$x = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\sin(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{(a^2\cos^2 T - b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = -\frac{a^2 b^2}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\cos(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{(a^2\cos^2 T - b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z = -\frac{a^2 b^2 m}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{dT}{(a^2\cos^2 T - b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}};$$

c) für die betreffenden windschiefen Parabeln:

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\sin(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{\sin^3 T},$$

$$y = -\frac{p}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\cos(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{\sin^3 T},$$

$$z = -\frac{p\, m}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{dT}{\sin^3 T}.$$

Am Schlusse dieses Abschnitts wird noch die zweite Methode für ein spezielles Beispiel durchgeführt.

Am Anfang des zweiten Abschnitts wird gezeigt, dass die windschiefen Kegelschnitte die Gratlinien der Polarflächen derjenigen Kurven darstellen, deren Krümmungsmittelpunktskurven geodätische Kreise auf ihren Polarflächen sind. Es werden dann

die natürlichen Gleichungen dieser Kurven aufgestellt. Man erhält dabei, wenn die Gratlinie der Polarfläche

a) eine windschiefe Ellipse ist:

$$\rho_1 = \pm \frac{8a^2b^2r_1^4}{\rho[4a^2r_1^2-(b^2-r_1^2)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \mp \frac{8a^2b^2r_1^3(b^2+r_1^2)}{\rho[4a^2r_1^2-(b^2-r_1^2)^2]^{\frac{1}{2}}\sqrt{4a^2r_1^2-(b^2+r_1^2)^2}};$$

b) eine windschiefe Hyperbel:

$$\rho_1 = \mp \frac{8a^2b^2r_1^4}{\rho[4a^2r_1^2-(b^2+r_1^2)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \mp \frac{8a^2b^2r_1^3(b^2-r_1^2)}{\rho[4a^2r_1^2-(b^2+r_1^2)^2]^{\frac{3}{2}}\sqrt{4a^2r_1^2-(b^2-r_1^2)^2}};$$

c) eine windschiefe Parabel:

$$\rho_1 = \mp \frac{8r_1^4}{\rho p^2}, \quad \frac{ds_1}{dr_1} = \mp \frac{8r_1^3}{p\rho\sqrt{4r_1^2-p^2}}.$$

Im Laufe dieser Untersuchungen wurden hauptsächlich folgende Werke und Abhandlungen benutzt:

Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1910.

Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 2. Aufl. Leipzig 1898.

Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsch von Kowalewski. Leipzig 1901.

Salkowski, Über eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven; XVII. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Salkowski, Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht; Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 4, 64—69. 1905.

Salkowski, Algebraisch rektifizierbare Kurven; Mathemathische Annalen 67.

Salkowski, Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsberichte der Mathematischen Gesellschaft, 7, 83—87. 1908.

Abschnitt I.

Ableitung der Gleichungen für die windschiefen Kegelschnitte.

§ 1.

Erste Methode zur Aufstellung der Gleichungen für die windschiefen Kegelschnitte.

Als erste natürliche Gleichung der windschiefen Kegelschnitte kann man die natürliche Gleichung der ebenen Kegelschnitte benutzen:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 9\,(-1 + A\,r^{\frac{2}{3}} - B\,r^{\frac{4}{3}})\,^1), \tag{1}$$

während man als zweite eine beliebige Relation zwischen Torsion und Bogenlänge annehmen kann:

$$\frac{1}{\rho} = f(s). \tag{2}$$

Wir können nun jeden einzelnen windschiefen Kegelschnitt dadurch bestimmen, dass wir die Gleichungen einer beliebigen Raumkurve aufstellen und dann die Gleichungen des windschiefen Kegelschnitts ableiten, der mit der als bekannt angenommenen Raumkurve in entsprechenden Punkten parallele Tangenten besitzt.

Es seien X, Y, Z die laufenden Koordinaten einer beliebigen Raumkurve, ausgedrückt durch einen beliebigen Parameter u. Ferner seien Krümmung, Torsion und Bogenlänge, K, T, S dieser Raumkurve ebenfalls als Funktionen von u be-

[1]) In allen kurventheoretischen Bezeichnungen (α, β, γ usw.) bin ich Scheffers gefolgt.

rechnet. Sind nun x, y, z die laufenden Koordinaten und $\varkappa$, τ, s Krümmung, Torsion und Bogenlänge des gesuchten windschiefen Kegelschnitts, so bestehen wegen der Parallelität der Tangenten offenbar die Gleichungen:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dX}{dS}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dY}{dS}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dZ}{dS}. \tag{3}$$

Bezeichnet nun $d\omega$ den Kontingenzwinkel und $d\omega'$ den Torsionswinkel des gesuchten windschiefen Kegelschnitts und nehmen wir an, dass die Hauptnormalen dieses Kegelschnitts und die der als bekannt angenommenen Raumkurve gleich gerichtet sind (parallel müssen sie ja nach Voraussetzung sein), so bestehen sowohl die Gleichungen:

$$\frac{d\omega}{ds} = \varkappa, \quad \frac{d\omega'}{ds} = \tau, \tag{4}$$

als auch

$$\frac{d\omega}{dS} = K, \quad \frac{d\omega'}{dS} = T. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$\varkappa ds = K dS, \quad \tau ds = T dS \tag{6}$$

und

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{K}{T}, \tag{7}$$

d. h. es besteht folgender, schon von N. J. Hatzidakis aus den Frenetschen Formeln abgeleiteter Satz:

Sind zwei Raumkurven so aufeinander bezogen, dass in entsprechenden Punkten ihre Tangenten parallel sind, so ist das Verhältnis von Krümmung und Torsion bei beiden Kurven dasselbe.

Aus (1) ergibt sich nun:

$$ds = \frac{\varepsilon}{3} \frac{dr}{\sqrt{-1 + A r^{\frac{2}{3}} - B r^{\frac{4}{3}}}},$$

und zwar ist $\varepsilon = \pm 1$ so zu bestimmen, dass $ds > 0$ wird. Setzen wir $\frac{1}{r} = \varkappa$, so folgt:

$$(8) \qquad ds = -\frac{\varepsilon}{3} \frac{d\varkappa}{\varkappa^{\frac{4}{3}} \sqrt{-\varkappa^{\frac{4}{3}} + A\,\varkappa^{\frac{2}{3}} - B}}.$$

Um $\varkappa$ als Funktion von u zu bestimmen, erhalten wir jetzt aus (6) und (8)

$$\int -\frac{\varepsilon}{3} \frac{d\varkappa}{\varkappa^{\frac{4}{3}} \sqrt{-\varkappa^{\frac{4}{3}} + A\,\varkappa^{\frac{2}{3}} - B}} = \int K \frac{dS}{du}\, du.$$

$$= \omega.$$

Wir bezeichnen das auf der linken Seite der Gleichung stehende Integral mit J. Zu seiner Auswertung schlagen wir folgenden Weg ein:

Wir setzen zunächst:

$$\varkappa^{\frac{2}{3}} = \xi$$

$$d\varkappa = \frac{3}{2} \xi^{\frac{1}{2}}\, d\xi$$

Dann wird

$$J = -\frac{\varepsilon}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + A\,\xi - B}}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B\right) - \left(\frac{A}{2} - \xi\right)^2}}.$$

Setzen wir hierin

$$\frac{A - 2\,\xi}{\sqrt{A^2 - 4\,B}} = \eta\,,$$

so wird

$$J = \frac{\varepsilon}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{\varepsilon}{2} \arcsin \eta$$

$$J = \frac{\varepsilon}{2} \arcsin \left(\frac{A - 2\,\varkappa^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{A^2 - 4\,B}} \right).$$

Wir haben also gefunden:

$$\frac{\varepsilon}{2} \arcsin\left(\frac{A - 2\,\varkappa^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{A^2 - 4\,B}}\right) = \omega\,.$$

Wir berechnen hieraus $\varkappa$:

$$\frac{A - 2\,\varkappa^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{A^2 - 4\,B}} = \varepsilon \sin 2\,\omega$$

$$\varkappa^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left\{A - \varepsilon\sqrt{A^2 - 4\,B}\,\sin 2\,\omega\right\}.$$

Diese Formel können wir noch weiter vereinfachen, wenn wir setzen:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 - 4\,B}} = \varepsilon \sin 2\,\alpha\,.$$

Alsdann erhalten wir:

$$\varkappa^{\frac{2}{3}} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{A^2 - 4\,B}\left\{\sin 2\,\alpha - \sin 2\,\omega\right\}$$

$$= \varepsilon\sqrt{A^2 - 4\,B}\,\sin(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega),$$

also:

$$\varkappa = \sqrt[3]{\varepsilon\sqrt{A^2 - 4\,B}\,\sin(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega)}$$

Nun ergibt sich aus (6):

$$ds = \frac{K\,d\,S}{\varkappa} = \frac{d\,\omega}{\varkappa}$$

$$s = \int \frac{d\,\omega}{\varkappa}\,,$$

oder eingesetzt:

$$s = \int \frac{d\,\omega}{\sqrt[3]{\varepsilon\sqrt{A^2 - 4\,B}\,\sin(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega)}}\,.$$

Wir erhalten jetzt aus den Gleichungen (3) die endlichen Gleichungen des windschiefen Kegelschnitts in der Form:

$$x = \int \frac{X'\,d\,\omega}{\sqrt[3]{\varepsilon\sqrt{A^2 - 4\,B}\,\sin(\alpha - \omega)\cos(\alpha + \omega)}}\,,$$

$$y = \int \frac{Y' \, d\omega}{\sqrt{\varepsilon \sqrt{A^2 - 4B \sin(\alpha - \omega) \cos(\alpha + \omega)}^3}},$$

$$z = \int \frac{Z' \, d\omega}{\sqrt{\varepsilon \sqrt{A^2 - 4B \sin(\alpha - \omega) \cos(\alpha + \omega)}^3}},$$

wobei der Strich bei der Funktionsbezeichnung die Ableitung nach der Bogenlänge S ausdrückt.

Speziell bei der Parabel wird $A = 1$, $B = 0$, α also gleich $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4}$ je nach der Bedeutung von ε, sodass wir die Gleichung der windschiefen Parabel in der Form erhalten:

$$x = \sqrt{2} \int \frac{X' \, d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}, \quad y = \sqrt{2} \int \frac{Y' \, d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}},$$

$$z = \sqrt{2} \int \frac{Z' \, d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel wird $A = 0$, $B = -1$, α also $= \frac{\pi}{2}$ und wir erhalten:

$$x = \int \frac{X' \, d\omega}{\sqrt{-\varepsilon \sin 2\omega}}, \quad y = \int \frac{Y' \, d\omega}{\sqrt{-\varepsilon \sin 2\omega}},$$

$$z = \int \frac{Z' \, d\omega}{\sqrt{-\varepsilon \sin 2\omega}}.$$

Dagegen gelten die Gleichungen nicht für den windschiefen Kreis, da hier $\frac{dr}{ds} = 0$ wird.

Durch geeignete Wahl der als bekannt angenommenen Raumkurve lassen sich auf obige Weise die Gleichungen jedes windschiefen Kegelschnitts erhalten. Aus Gleichung (7) folgt zum Beispiel, dass wir zu den allgemeinen Schraubenlinien unter den windschiefen Kegelschnitten kommen, wenn wir von den Gleichungen einer bekannten Schraubenlinie, zum Beispiel von einer gemeinen Schraubenlinie, ausgehen.

§ 2.

Zweite Methode zur Aufstellung der Gleichungen der windschiefen Kegelschnitte.

Wir wollen bei dieser zweiten Methode die drei Kegelschnitte einzeln behandeln.

A. Windschiefe Ellipse.

Nehmen wir die bekannte Parameterdarstellung der Ellipse

$$x = a \cos t$$
$$y = b \sin t$$

an, so ergibt sich das Bogenelement als:

$$ds = dt \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,.$$

Um hierin an Stelle von dt den Kontingenzwinkel dT und entsprechend T anstatt t einzuführen, berechnen wir:

$$dT = \frac{a\,b\,dt}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$T = a\,b \int \frac{dt}{\cos^2 t \left\{ a^2 \operatorname{tg}^2 t + b^2 \right\}},$$

oder, wenn wir $\operatorname{tg} t = \xi$ setzen:

$$T = \frac{a}{b} \int \frac{d\xi}{1 + \frac{a^2}{b^2}\xi^2}.$$

$$T = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\xi\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right).$$

Wir erhalten also:

$$b \operatorname{tg} T = a \operatorname{tg} t,$$

und weiter

$$\frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} T$$

$$\sin^2 t \left\{ 1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 T \right\} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 T$$

$$\sin t = \frac{b \operatorname{tg} T}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 T}}$$

$$\sin t = \frac{b \sin T}{\sqrt{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T}}.$$

Ebenso:

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

$$\cos t = \frac{a \cos T}{\sqrt{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T}}.$$

Aus $$b \operatorname{tg} T = a \operatorname{tg} t$$

folgt: $$t = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} T \right)$$

und hieraus durch Differentiation:

$$dt = \frac{dT}{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 T} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\cos^2 T}$$

$$dt = \frac{ab\, dT}{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T}.$$

Wir können also jetzt ds durch T ausdrücken:

$$ds = \frac{ab\, dT}{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T} \sqrt{a^2 \frac{b^2 \sin^2 T}{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T} + b^2 \frac{a^2 \cos^2 T}{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T}}$$

$$ds = \frac{a^2 b^2\, dT}{(a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun sind die Gleichungen einer Raumkurve durch Quadraturen bestimmt, wenn man die Richtungskosinus der Tangenten, α, β, γ und das Bogenelement ds, ausgedrückt durch einen beliebigen Parameter, kennt.

Wir geben, was stets möglich ist, den Richtungskosinus die Form:

$$\alpha = \frac{\varphi(u) + u}{1 + u\, \varphi(u)}, \quad \beta = \frac{\varphi(u) - u}{1 + u\, \varphi(u)}$$

$$\gamma = \frac{1 - u\,\varphi(u)}{1 + u\,\varphi(u)}.$$

worin $\varphi(u)$ eine beliebige Funktion seines Arguments bedeutet.

Der Kontingenzwinkel nimmt dann die Form an:

$$dT = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}\,du,$$

wobei der Strich die Differentiation nach u andeuten soll. Zu seiner Berechnung bilden wir zunächst α', β', γ'. Wir finden:

$$\alpha' = \frac{[\varphi'(u) + 1][1 + u\,\varphi(u)] - [\varphi(u) + u][\varphi(u) + u\,\varphi'(u)]}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}$$

$$\alpha' = \frac{\varphi'(u)[1 - u^2] + 1 - \varphi(u)^2}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}$$

$$\beta' = -i\frac{[\varphi'(u) - 1][1 + u\,\varphi(u)] - [\varphi(u) - u][\varphi(u) - u\,\varphi'(u)]}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}$$

$$\beta' = -i\frac{\varphi'(u)\,[1 + u^2] - 1 - \varphi(u)^2}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}$$

$$\gamma' = \frac{[-\varphi(u) - u\,\varphi'(u)][1 + u\,\varphi(u)] - [1 - u\,\varphi(u)][\varphi(u) + u\,\varphi'(u)]}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}$$

$$\gamma' = -2\frac{\varphi(u) + u\,\varphi'(u)}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}.$$

Hieraus ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{du} = \frac{1}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}\Big[&\varphi'(u)^2(1 - u^2)^2 + 1 - 2\,\varphi(u)^2 \\ &+ \varphi(u)^4 + 2\,\varphi'(u)(1 - u^2) - 2\,\varphi'(u)\,\varphi(u)^2(1 - u^2) \\ &- \varphi'(u)^2(1 + u^2)^2 - 1 - 2\,\varphi(u)^2 - \varphi(u)^4 \\ &+ 2\,\varphi'(u)(1 + u^2) + 2\,\varphi'(u)\,\varphi(u)^2(1 + u^2) \\ &+ 8\,u\,\varphi(u)\,\varphi'(u) + 4\,u^2\,\varphi'(u)^2 + 4\,\varphi(u)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &- \frac{\sqrt{4\,\varphi'(u) + 4\,u^2\,\varphi'(u)\,\varphi(u)^2 + 8\,u\,\varphi(u)\,\varphi'(u)}}{[1 + u\,\varphi(u)]^2}\end{aligned}$$

$$dT = \frac{2\sqrt{\varphi'(u)}\,du}{1 + u\,\varphi(u)}.$$

Durch Integration findet man hieraus T durch u ausgedrückt und kann dann u als Funktion von T berechnen.

Das T bei dieser Berechnung und das T bei der oben ausgeführten Berechnung des Bogenelements der Ellipse sind gleich, da bei der Verbiegung einer Kurve ihre Krümmung $\frac{dT}{ds}$ dieselbe Funktion ihrer Bogenlänge bleibt, falls die Verbiegung durch Ab- oder Aufwicklung der Tangentenfläche der Kurve geschieht[1]).

Drücken wir nun auch noch α, β, γ durch T aus, so ergeben sich die endlichen Gleichungen der windschiefen Ellipse in der Form:

$$x = \int \alpha \frac{ds}{dT} dT, \quad y = \int \beta \frac{ds}{dT} dT, \quad z = \int \gamma \frac{ds}{dT} dT.$$

Die bei dieser Methode zur Berechnung von T nach u notwendige Quadratur kann man vermeiden, wenn man statt der oben gewählten Darstellung der Richtungskosinus eine solche Darstellung wählt, die T explicit anzugeben gestattet. Dies geschieht zum Beispiel durch:

$$\alpha = \frac{V' \cos v - V'' \sin v}{W},$$

$$\beta = \frac{V' \sin v + V'' \cos v}{W},$$

$$\gamma = i \cdot \frac{V + V''}{W},$$

wo $$W = \sqrt{V'^2 + V''^2 - (V + V'')^2}$$

und V eine beliebige Funktion von v ist.

Beide Darstellungen der Richtungskosinus haben übrigens den einen Nachteil, dass reellen Funktionswerten im allgemeinen nicht reelle Parameterwerte entsprechen, doch wird dieser Nachteil dadurch wieder etwas ausgeglichen, dass durch sie, besonders durch die erste, die Verfasser allein zur Berechnung von Beispielen verwertet hat, die Rechnung bedeutend vereinfacht wird.

[1]) Siehe Scheffers, Anwendung d. Diff.- und Integralrechnung auf Geometrie. I, S. 358.

Verhältnismässig sehr einfache Formeln erhält man, wenn man unter den windschiefen Ellipsen die allgemeinen Schraubenlinien aufsucht. Wir wollen für diese eine andere Darstellung der Richtungskosinus benutzen.

Für alle Schraubenlinien gilt allgemein:

$$dx^2 + dy^2 - \frac{1}{m^2} dz^2 = 0\ ^1),$$

wobei $m = \operatorname{tg} \alpha$ die trigonometrische Tangente des Steigwinkels bedeutet. Dividieren wir obige Gleichung durch ds^2, so erhalten wir:

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{m^2} \gamma^2 = 0.$$

Nun besteht ferner allgemein die Beziehung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Diese beiden Gleichungen werden befriedigt, wenn wir setzen:

$$\alpha = -\frac{\sin u}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$\beta = \frac{\cos u}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Hieraus ergibt sich sofort der Kontingenzwinkel

$$dT = \frac{du}{\sqrt{1 + m^2}}$$

und hieraus weiter:

$$T = \frac{u}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$u = T\sqrt{1 + m^2}$$

$$\alpha = -\frac{\sin (T\sqrt{1 + m^2})}{\sqrt{1 + m^2}} \qquad \beta = \frac{\cos (T\sqrt{1 + m^2})}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

[1]) Siehe: Schlömilch, Über Linien von gleicher Steigung auf gegebenen Flächen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. I. 250.

Nun war:

$$ds = \frac{a^2 b^2 \, dT}{\sqrt{a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T^3}},$$

sodass wir für die unter den windschiefen Ellipsen vorhandenen Schraubenlinien finden:

$$x = -\frac{a^2 b^2}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\sin(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{(a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{\cos(T\sqrt{1+m^2})\, dT}{(a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z = \frac{a^2 b^2 m}{\sqrt{1+m^2}} \int \frac{dT}{(a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

B. Windschiefe Hyperbel.

Die Formeln für die windschiefe Hyperbel leiten sich aus den für die windschiefe Ellipse gefundenen einfach dadurch her, dass in diesen b durch ib, oder — was dasselbe bedeutet — dass die Kreisfunktionen durch die hyperbolischen Funktionen ersetzt werden.

Wir nehmen also als Gleichungen für die Hyperbel

$$x = a \cos t,$$
$$y = ib \sin t.$$

Dann wird

$$ds = dt \sqrt{a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t},$$

ferner

$$dT = \frac{iab\, dt}{a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t},$$

und, wenn man die Integration genau analog der für die entsprechende Formel bei der windschiefen Ellipse durchgeführten ausführt:

$$T = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{ib} \operatorname{tg} t\right)$$

$$ib \operatorname{tg} T = a \operatorname{tg} t.$$

Hieraus ergibt sich weiter:

$$\sin t = \frac{ib \sin T}{\sqrt{a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T}},$$

$$\cos t = \frac{a \cos T}{\sqrt{a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T}},$$

$$dt = \frac{i\,a\,b\,dT}{a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T}.$$

Setzt man diese Werte in die obige Formel für das Bogenelement ein, so ergibt sich schliesslich:

$$ds = -\frac{a^2 b^2 dT}{[a^2 \cos^2 T - b^2 \sin T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Man wird auch hier wieder eine der beiden schon oben für die windschiefe Ellipse angegebenen Darstellungen für die Richtungskosinus wählen. Jene Ausführungen gelten auch hier wörtlich, sodass wir nur auf sie zu verweisen brauchen.

Auch das oben über die Darstellung der Richtungskosinus bei der Aufsuchung der allgemeinen Schraubenlinien gesagte gilt für die hierher gehörigen Schraubenlinien wörtlich, sodass sich uns deren endliche Gleichungen in der Form ergeben:

$$x = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{1 + m^2}} \int \frac{\sin (T \sqrt{1 + m^2})\, dT}{(a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = -\frac{a^2 b^2}{\sqrt{1 + m^2}} \int \frac{\cos (T \sqrt{1 + m^2})\, dT}{(a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z = -\frac{a^2 b^2 m}{\sqrt{1 + m^2}} \int \frac{dT}{(a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}.$$

C. Windschiefe Parabel.

Wir gehen aus von den Gleichungen:

$$x = \frac{t^2}{2p},$$

$$y = t.$$

Dann ergibt sich das Bogenelement:

$$ds = dt \sqrt{\frac{t^2}{p^2} + 1}$$

$$= \frac{dt}{p} \sqrt{t^2 + p^2}.$$

Wir führen auch hier wieder T als Parameter ein:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{p\left(\frac{t^2}{p^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{p}{t^2 + p^2}.$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, führen wir als Hilfsveränderliche ein:

$$\xi = \frac{t}{p},$$

$$p\, d\xi = dt.$$

Wir erhalten dann

$$T = -\int \frac{d\xi}{1 + \xi^2}$$

oder:

$$T = \operatorname{arc\,cotg} \xi.$$

$$T = \operatorname{arc\,cotg} \frac{t}{p}.$$

Hieraus bestimmen wir t als Funktion von T:

$$\operatorname{cotg} T = \frac{t}{p},$$

$$t = p \operatorname{cotg} T,$$

ferner:

$$dt = -\frac{p\, dT}{\sin^2 T}.$$

Setzen wir dies in die obige Formel für das Bogenelement ein, so erhalten wir:

$$ds = -\frac{p\,dT}{\sin^2 T}\sqrt{\cotg^2 T + 1},$$

$$ds = -\frac{p\,dT}{\sin^3 T}.$$

Wir haben also wieder das Bogenelement als Funktion von T dargestellt und können zur Verwertung dieser Formel behufs Aufstellung der Gleichungen für windschiefe Parabeln wiederum auf das bei der windschiefen Ellipse über die Darstellung der Richtungskosinus und die Aufstellung der endlichen Gleichungen gesagte verweisen.

Zur Bestimmung der Schraubenlinien unter den windschiefen Parabeln, gehen wir wieder aus von der Darstellung der Richtungskosinus:

$$\alpha = -\frac{\sin u}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \beta = \frac{\cos u}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$\gamma = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

die uns ergab:

$$T = \frac{u}{\sqrt{1+m^2}}$$

und weiter:

$$\alpha = -\frac{\sin(T\sqrt{1+m^2})}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \beta = \frac{\cos(T\sqrt{1+m^2})}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$\gamma = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Berücksichtigt man noch die oben gefundene Formel für das Bogenelement, so ergeben sich als endliche Gleichungen für die unter den windschiefen Parabeln vorhandenen Schraubenlinien:

$$x = -\frac{p}{\sqrt{1+m^2}}\int \frac{\sin(T\sqrt{1+m^2})\,dT}{\sin^3 T},$$

$$y = -\frac{p}{\sqrt{1+m^2}}\int \frac{\cos(T\sqrt{1+m^2})\,dT}{\sin^3 T},$$

$$z = -\frac{p\,m}{\sqrt{1+m^2}}\int \frac{dT}{\sin^3 T}.$$

Diese Gleichungen nehmen in dem speziellen Falle $m = \sqrt{3}$ eine leicht auswertbare Form an:

$$x = \frac{p}{2} \int \frac{\sin 2T}{\sin^3 T} \, dT,$$

$$y = -\frac{p}{2} \int \frac{\cos 2T}{\sin^3 T} \, dT,$$

$$z = -\frac{p}{2} \sqrt{3} \int \frac{dT}{\sin^3 T}.$$

Das erste Integral reduziert sich sofort auf die Form:

$$2 \int \frac{\cos T}{\sin^2 T} \, dT$$

und geht durch die Substitution

$$\sin T = \xi$$

über in:

$$2 \int \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= -\frac{2}{\xi} = -\frac{2}{\sin T}.$$

Wir erhalten also:

$$x = -\frac{p}{\sin T}.$$

Das zweite Integral können wir zerlegen in:

$$\int \frac{dT}{\sin^3 T} - 2 \int \frac{dT}{\sin T}.$$

Wir bezeichnen das erste dieser beiden Integrale mit J_1, das zweite mit J_2.

Durch die Substitution

$$\sin T = \frac{1}{\xi}$$

erhalten wir:

$$J_1 = -\int \frac{\xi^2 \, d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}},$$

$$J_1 = -\frac{1}{2} \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

In diesem letzten Integral setzen wir:

$$\sqrt{\xi^2 - 1} = \xi + \tau_1,$$

wobei es übergeht in

$$\int \frac{d\tau_1}{-\tau_1} =$$

$$= -\lg(-\tau_1)$$

$$= -\lg(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}).$$

Es ergibt sich also:

$$J_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin T}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 T} - 1}$$

$$+\frac{1}{2}\lg\left[\frac{1}{\sin T} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 T} - 1}\right],$$

$$J_1 = -\frac{1}{2}\frac{\cot g T}{\sin T} + \frac{1}{2}\lg\frac{1 - \cos T}{\sin T},$$

$$J_1 = -\frac{1}{2}\frac{\cot g T}{\sin T} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\frac{T}{2}.$$

Zur Berechnung von J_2 setzen wir wieder

$$\sin T = \frac{1}{\xi}$$

und erhalten

$$J_2 = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$= \lg(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$= \lg \operatorname{tg}\frac{T}{2},$$

sodass wir finden:

$$v = \frac{p}{4}\left(\frac{\cot g T}{\sin T} + 3\lg \operatorname{tg}\frac{T}{2}\right).$$

Der Wert des in z auftretenden Integrals hat sich uns schon bei der Berechnung von y ergeben, sodass wir haben:

$$z = \frac{p}{4}\sqrt{3}\left\{\frac{\operatorname{cotg} T}{\sin T} - \lg \operatorname{tg}\frac{T}{2}\right\}.$$

Die endlichen Gleichungen für die unter den windschiefen Parabeln vorhandene Schraubenlinie, deren Steigwinkel 60^0 beträgt, lauten also:

$$x = -\frac{p}{\sin T},$$

$$y = \frac{p}{4}\left\{\frac{\operatorname{cotg} T}{\sin T} + 3 \lg \operatorname{tg}\frac{T}{2}\right\},$$

$$z = \frac{p}{4}\sqrt{3}\left\{\frac{\operatorname{cotg} T}{\sin T} - \lg \operatorname{tg}\frac{T}{2}\right\}.$$

Richten wir uns in der Lage des Koordinatensystems nach Scheffers, und drehen wir dieses dann um die X-Achse als Achse im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers (von der Seite der positiven X-Achse aus gesehen) um 60^0, so gehen obige Formeln über in:

$$x = -\frac{p}{\sin T}; \qquad y' = \frac{p}{2}\frac{\operatorname{cotg} T}{\sin T}$$

$$z' = -\frac{p}{2}\sqrt{3}\lg \operatorname{tg}\frac{T}{2}.$$

Die Projektion der Kurve auf die XY'-Ebene hat die Gleichung:

$$4 p^2 y'^2 = x^4 - p^2 x^2,$$

ist also algebraisch, während die Gleichung der Projektion auf die XZ'-Ebene lautet:

$$x = -\frac{p}{2}\left[e^{\lambda z'} + e^{-\lambda z'}\right]$$

$$x = -\frac{p}{2}\operatorname{Cof}(\lambda z'), \quad \text{wo } \lambda = \frac{2}{p\sqrt{3}}.$$

§ 3.

Beispiel.

Zum Schlusse dieses Abschnitts wollen wir noch zu der zweiten Methode zur Aufstellung der Gleichungen der windschiefen Kegelschnitte ein Beispiel durchführen.

Setzt man in der Darstellung der Richtungskosinus

$$\varphi(u) = \frac{c_1 u - c_2}{d_1 u + d_2},$$

so gelangt man zu Schraubenlinien[1]), deren Gleichungen wir schon auf anderem Wege erhalten haben.

Wir wollen nun die windschiefe Ellipse bestimmen, für die in der erwähnten Darstellung der Richtungskosinus

$$\varphi(u) = \dots + c u^3$$

ist. Dann erhalten wir die Richtungskosinus in der Form:

$$\alpha = \frac{u - c u^3}{1 - c u^4}, \qquad i\beta = -\frac{u + c u^3}{1 - c u^4},$$

$$\gamma = \frac{1 + c u^4}{1 - c u^4}.$$

Ferner erhalten wir:

$$dT = \frac{2 i u^2 3 c}{1 - c u^4} du.$$

Hieraus folgt:

$$T = 2 i 1 3 c \int \frac{u\,du}{1 - c u^4},$$

$$T = 2 i 1 3 c \int \frac{u\,du}{c u^4 - 1}.$$

Wir substituieren:

$$1 - c u^2 = v$$

[1]) Vergl. Salkowski: Algebraisch rektifizierbare Kurven. Math. Ann. 67.

und erhalten:

$$T = -i\sqrt{3}\int \frac{dv}{v^2-1}$$

$$= -i\sqrt{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(v-1) - \frac{1}{2}\lg(v+1)\right\},$$

$$T = \frac{i}{2}\sqrt{3}\lg\frac{\sqrt{1-cu^2}-1}{\sqrt{1-cu^2}+1}$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{3}\lg\frac{u^2\sqrt{\frac{1}{c}}}{u^2+\sqrt{\frac{1}{c}}}.$$

Aus dieser Formel müssen wir u durch T ausdrücken. Wir finden:

$$\frac{2iT}{\sqrt{3}} = \lg\frac{u^2\sqrt{\frac{1}{c}}}{u^2+\sqrt{\frac{1}{c}}},$$

$$e^{\frac{2iT}{\sqrt{3}}} = \frac{u^2-\sqrt{\frac{1}{c}}}{u^2+\sqrt{\frac{1}{c}}},$$

$$u^2\left[e^{\frac{2iT}{\sqrt{3}}}-1\right] = -\sqrt{\frac{1}{c}}\left[e^{\frac{2iT}{\sqrt{3}}}+1\right],$$

$$u^2 = -\sqrt{\frac{1}{c}}\,\frac{e^{\frac{2iT}{\sqrt{3}}}+1}{e^{\frac{2iT}{\sqrt{3}}}-1}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{c}}\,\frac{e^{\frac{iT}{\sqrt{3}}} + e^{\frac{-iT}{\sqrt{3}}}}{e^{\frac{iT}{\sqrt{3}}} - e^{\frac{-iT}{\sqrt{3}}}}$$

$$= i\sqrt{\frac{1}{c}}\,\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}$$

$$u = \sqrt{\frac{i}{\sqrt{c}}\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}}.$$

Setzen wir diesen Wert für u in die Ausdrücke für die Richtungskosinus ein, so erhalten wir:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{i}{\sqrt{c}}\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}}\left[1 - i\sqrt{c}\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}\right]}{1 + \operatorname{cotg}^2\frac{T}{\sqrt{3}}}$$

$$\alpha = \sin^2\frac{T}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{i}{\sqrt{c}}\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}}\left[1 - i\sqrt{c}\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}\right],$$

$$i\beta = -\sin^2\frac{T}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{i}{\sqrt{c}}\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}}\left[1 + i\sqrt{c}\operatorname{cotg}\frac{T}{\sqrt{3}}\right],$$

$$\gamma = \frac{1 - \operatorname{cotg}^2\frac{T}{\sqrt{3}}}{1 + \operatorname{cotg}^2\frac{T}{\sqrt{3}}},$$

$$\gamma = -\cos\frac{2T}{\sqrt{3}}.$$

Nun war:

$$ds = \frac{a^2 b^2 dT}{[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir erhalten also als endliche Gleichungen der gesuchten windschiefen Ellipse:

$$x = \frac{a^2 b^2 i}{\sqrt[4]{-c}} \int \frac{\sin^2\left(\frac{T}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{\cot g \frac{T}{\sqrt{3}}} \left[1 - \sqrt{-c} \cot g \frac{T}{\sqrt{3}}\right]}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}} \, dT,$$

$$y = -\frac{a^2 b^2}{\sqrt[4]{-c}} \int \frac{\sin^2\left(\frac{T}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{\cot g \frac{T}{\sqrt{3}}} \left[1 + \sqrt{-c} \cot g \frac{T}{\sqrt{3}}\right]}{[a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}} \, dT,$$

$$z = -a^2 b^2 \int \frac{\cos \frac{2T}{\sqrt{3}}}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}} \, dT.$$

Abschnitt II.

Die windschiefen Kegelschnitte als Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte für bestimmte Kurven.

§ 4.

Einleitung.

Die windschiefen Kegelschnitte haben kurventheoretisch eine interessante Bedeutung. Sie sind nämlich der Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte derjenigen Kurven, deren Krümmungsmittelpunktskurve einen geodätischen Kreis auf ihrer Polarfläche darstellt. Dies lässt sich so zeigen.

Denkt man sich alle Normalebenen einer Kurve konstruiert, so hüllen diese eine Fläche ein, die Fläche der Krümmungsachsen oder Polarfläche genannt. Die Gratlinie dieser Fläche ist der Ort für die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln der ursprünglichen Kurve. Wenn man nun diese Polarfläche samt ihren Berührungsebenen auf eine Ebene ausbreitet, so fallen alle diese Berührungsebenen, also die Normalebenen der ursprünglichen Kurve, aufeinander, und zwar so, dass alle Punkte der ursprünglichen Kurve C in einen Punkt $\mathfrak{C}$ fallen. Wir wollen die Kurven, in die bei dieser Abwicklung die Krümmungsmittelpunktskurve K und die Gratlinie der Polarfläche P übergehen, beziehungsweise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ nennen. Dann hat schon Steiner[1]) gezeigt, dass $\mathfrak{K}$ die Fusspunktskurve des Punktes $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die Kurve $\mathfrak{P}$ darstellt. Nehmen wir nun also an, dass K auf der Polarfläche konstante geodätische Krümmung habe, so stellt $\mathfrak{K}$ einen Kreis dar, dessen Radius gleich dem reziproken Werte jener konstanten geodätischen Krümmung ist; denn bei

[1]) Steiner, Werke II, 161.

der Abwicklung einer Fläche ist die geodätische Krümmung ihrer Kurven invariant. Die Kurve $\mathfrak{P}$ kann man sich also so entstanden denken: sie wird umhüllt von dem freien Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel auf einem Kreise entlang gleitet und dessen anderer Schenkel durch einen festen Punkt geht, d. h. sie ist ein Kegelschnitt, $\mathfrak{C}$ ihr Brennpunkt und $\mathfrak{K}$ ihr Scheitelkreis.

Lässt man nun die Tangentenfläche von $\mathfrak{P}$ auf einer ihrer Biegungsflächen, z. B. also auf der oben erwähnten Polarfläche, abrollen, so beschreiben die beiden Brennpunkte Kurven, die die Eigenschaft haben, dass ihre Krümmungsmittelpunktskurve ein geodätischer Kreis auf ihrer Polarfläche ist. Mit jedem windschiefen Kegelschnitt sind also stets eine oder zwei reelle derartige Kurven verbunden, je nachdem es sich um eine windschiefe Parabel oder um eine windschiefe Ellipse oder Hyperbel handelt. Sie sind Filarevolventen einer und derselben geodätischen Linie auf der Polarfläche, die bei der oben beschriebenen Rollbewegung von der grossen Achse des Kegelschnitts eingehüllt wird, ferner Planevolventen des windschiefen Kegelschnitts.

Ist speziell die konstante geodätische Krümmung von K auf der Polarfläche $= 0$, d. h. K eine geodätische Linie auf der Polarfläche, so stellt P eine windschiefe Parabel dar. Diesen Fall behandeln Schell und Pirondini an den angeführten Orten[1]).

Wir werden nun im Folgenden die Gleichungen dieser „Brennpunktskurven“ zusammen mit denen einiger anderen mit den windschiefen Kegelschnitten in Beziehung stehenden Kurven aufstellen und ihre wesentlichsten Eigenschaften untersuchen.

[1]) S. S. 5.

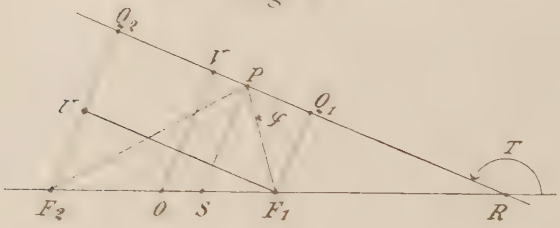
I. Kapitel.

Die mit der windschiefen Ellipse verbundenen Kurven.

§ 5.

Erste Brennpunktskurve.

Fig. I.



In Figur I. stellt P einen Ellipsenpunkt vor, F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte der Ellipse, Q_1 und Q_2 die beiden Schnittpunkte der in P an die Ellipse gelegten Tangente mit dem Scheitelkreise, R den Schnittpunkt der Tangente mit der grossen Achse, S den Schnittpunkt der (Haupt-)Normale in P mit der grossen Achse, V den Fusspunkt des Lotes vom Mittelpunkte O auf die Tangente. F_1U ist eine Parallele durch F_1 zur Tangente.

Nun hat die von F_1 bei der Abrollung beschriebene Kurve — wir wollen sie kurz mit (F_1) bezeichnen — die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= x + PQ_1\alpha - Q_1F_1 l, \\ y_1 &= y + PQ_1\beta + Q_1F_1 m, \\ z_1 &= z + PQ_1\gamma + Q_1F_1 n. \end{aligned}$$

Die Grössen PQ_1 und Q_1F_1 erhalten wir aus der Figur auf folgende Weise:

Wir führen den Winkel φ als Hilfsgrösse ein. Dann ist:

$$\begin{aligned} Q_2F_2 &= PF_2 \sin\varphi \\ Q_1F_1 &= PF_1 \sin\varphi \\ \hline Q_2F_2 + Q_1F_1 &= 2a \sin\varphi. \end{aligned}$$

Ferner aus $\triangle UF_2F_1$

$$Q_2F_2 - Q_1F_1 = 2e \sin T,$$

wobei

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Wir finden also:

$$Q_1 F_1 = a \sin \varphi - e \sin T$$
$$Q_2 F_2 = a \sin \varphi + e \sin T.$$

Nun ist:

$$P Q_1 = Q_1 F_1 \operatorname{cotg} \varphi$$
$$P Q_2 = Q_2 F_2 \operatorname{cotg} \varphi ,$$

oder also:

$$P Q_1 = a \cos \varphi - e \sin T \operatorname{cotg} \varphi$$
$$P Q_2 = a \cos \varphi + e \sin T \operatorname{cotg} \varphi .$$

Wir drücken nun noch den Winkel φ durch T aus, um Ausdrücke zu erhalten, die bei Verbiegung der Kurve invariant bleiben (vergl. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I, 358).

Dazu erhalten wir wieder aus der Figur:

$$P Q_1 + P Q_2 = 2 a \cos \varphi$$

und

$$P Q_1 + P Q_2 = 2 e \cos T \quad ^1).$$

Es ist also:

$$\cos \varphi = \frac{e}{a} \cos T$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 T}$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{e \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} .$$

Wir finden:

$$P Q_1 = e \cos T - \frac{e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}$$

$$= \frac{e \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} \left[\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T \right]$$

$$P Q_2 = e \cos T + \frac{e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}$$

$$= \frac{e \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} \left[\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + e \sin T \right]$$

---

[1]) Eventuell: $-2 e \cos T$, je nach Lage von P.

$$Q_1 F_1 = \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T$$

$$Q_2 F_2 = \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + e \sin T ,$$

so dass also die Gleichungen für (F_1) die Form annehmen:

$$x_1 = x + \frac{\alpha e \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} \left[\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T\right] + l\left[\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T\right]$$

oder:

$$x_1 = x + \left[1 - \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right]\left[\alpha e \cos T + l\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}\right],$$

$$y_1 = y + \left[1 - \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right]\left[\beta e \cos T + m\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}\right],$$

$$z_1 = z + \left[1 - \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right]\left[\gamma e \cos T + n\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}\right].$$

Aus den Betrachtungen am Eingange dieses Abschnitts folgt, dass der Krümmungsradius von (F_1) gleich $F_1 Q_1$ ist, also

$$r_1 = \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T.$$

Weiter ist der windschiefe Kegelschnitt (P) Gratlinie der Polarfläche der Kurve (F_1), also ist:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \varepsilon \varepsilon' \frac{r}{\rho} \quad ^{1})$$

Hierin ist

$$\varepsilon = \pm 1 ,$$

je nachdem

$$\frac{r}{\rho} + r' \rho' + r'' \rho \gtrless 0 ,$$

wenn der Strich die Ableitung nach der Bogenlänge ausdrückt.

[1]) Lancret, Mémoires sur les courbes à double courbure, p. 419. Schell, a. a. O., p. 24. Scheffers, a. a. O., p. 406 f.

Alle Buchstaben ohne Indices beziehen sich auf den windschiefen Kegelschnitt (P), die Buchstaben mit Indices auf die Kurven mit gleichen Indices.

Ferner ist

$$\varepsilon' = \pm 1 ,$$

je nachdem

$$\frac{1}{\rho} \gtrless 0.$$

Nun war:

$$r = \frac{a^2 b^2}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(vergl. p. 17)},$$

also:

$$\rho_1 = \varepsilon \varepsilon' \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{a^2 b^2 [\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T]}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist weiter

$$d B_1 = \varepsilon d T , \quad ^1)$$

also

$$\frac{d s_1}{d B_1} = \varepsilon \frac{d s_1}{d T}$$

$$\rho_1 = \varepsilon \frac{d s_1}{d T} ;$$

hieraus ergibt sich sofort das Bogenelement

$$d s_1 = \varepsilon' \frac{a^2 b^2 [\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T] d T}{\rho [a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun war:

$$r_1 = \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - e \sin T.$$

Hieraus folgt

$$\sin T = \frac{b^2 - r_1^2}{2 e r_1} .$$

Setzen wir diesen Wert in die oben gefundenen Ausdrücke für ρ_1 und ds_1 ein, so erhalten wir als natürliche Gleichungen der Kurve (F_1):

$$\rho_1 = \varepsilon \varepsilon' \frac{8 a^2 b^2 r_1^4}{\rho \left[4 a^2 r_1^2 - [b^2 - r_1^2]^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d s_1}{d r_1} = - \varepsilon' \frac{8 a^2 b^2 r_1^3 [b^2 + r_1^2]}{\rho \left[4 a^2 r_1^2 - [b^2 - r_1^2]^2\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 a^2 r_1^2 - [b^2 + r_1^2]^2}}.$$

[1]) Scheffers, a. a. O. p. 407.

Wir wollen als Beispiel für einen windschiefen Kegelschnitt die Seite 18—19 berechneten Schraubenlinien benutzen.

Für sie ist:

$$\frac{r}{\rho} = -m.$$

Ferner ist

$$r = \frac{a^2 b^2}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin T]^{\frac{3}{2}}},$$

daher

$$\rho = -\frac{a^2 b^2}{m\,[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

und

$$r' = -\frac{3 a^2 b^2 e^2 \sin T \cos T}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2}$$

$$= \frac{3 e^2 \sin T \cos T}{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T}$$

$$r'' = \frac{3 e^2 \left[[\cos^2 T - \sin^2 T][a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T] + 2 e^2 \sin^2 T \cos^2 T\right]}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^2} \cdot \frac{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2}$$

$$= \frac{3 e^2 [a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]}{a^2 b^2 \sqrt{a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T}}$$

$$\rho' = -\frac{3 e^2 \sin T \cos T}{m\,[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]}.$$

Ist die Schraubenlinie rechtsgewunden[1]), also $m > 0$, so ergibt sich

$$\varepsilon = -1$$
$$\varepsilon' = +1;$$

ist sie dagegen linksgewunden, also $m < 0$, so ergibt sich

$$\varepsilon = +1$$
$$\varepsilon' = -1.$$

[1]) Siehe Scheffers, a. a. O. p. 213.

In beiden Fällen ist also

$$\frac{r_1}{\rho_1} = -\frac{1}{m},$$

$$\rho_1 = -r_1 m,$$

aber

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \pm \frac{m[b^2 + r_1^2]}{\sqrt{4a^2 r_1^2 - [b^2 + r_1^2]^2}},$$

je nachdem der erste oder der zweite Fall vorliegt.

Aus $\frac{r_1}{\rho_1} = -\frac{1}{m}$ folgt, dass auch (F_1) eine Schraubenlinie ist, was ja von vornherein zu erwarten war. Ausserdem folgt daraus, dass der Steigwinkel von (F_1) der Komplementwinkel des Steigwinkels von (P) ist.

§ 6.

Zweite Brennpunktskurve.

Die bei der Abrollung durch den zweiten Brennpunkt beschriebene Kurve, die wir entsprechend (F_2) nennen wollen, hat die Gleichungen:

$$x_2 = x - PQ_2\alpha + Q_2F_2 l$$
$$y_2 = y - PQ_2\beta + Q_2F_2 m$$
$$z_2 = z - PQ_2\gamma + Q_2F_2 n.$$

Die Grössen PQ_2 und Q_2F_2 haben wir schon im vorigen Paragraphen bei der Bestimmung der Grössen PQ_1 und Q_1F_1 mit erhalten, so dass die Gleichungen für (F_2) lauten:

$$x_2 = x - \frac{\alpha e\cos T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} + e\sin T]$$
$$+ l[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} + e\sin T],$$

oder:

$$x_2 = x - \left[1 + \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right][\alpha e\cos T - l\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}],$$

$$y_2 = y - \left[1 + \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right][\beta e\cos T - m\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}],$$

$$z_2 - z = \left[1 + \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right] [\gamma e \cos T - n \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}].$$

Für die weiteren Untersuchungen über die Kurve (F_2) können wir auf den vorigen Paragraphen verweisen, da das dort über die Kurve (F_1) Gesagte auch hier gilt.

Wir finden:

$$r_2 = \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + e \sin T ,$$

ferner:

$$\frac{\rho_2}{r_2} = \varepsilon \varepsilon' \frac{r}{\rho}$$

und hieraus

$$\rho^2 = \varepsilon \varepsilon' \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{a^2 b^2 [\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + e \sin T}{[a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ferner ist auch hier

$$d B_2 = \varepsilon d T ,$$

woraus sich wieder ergibt:

$$\frac{d s_2}{d B_2} = \varepsilon \frac{d s_2}{d T}$$

$$\rho_2 = \varepsilon \frac{d s_2}{d T}$$

Wir finden hieraus das Bogenelement:

$$d s_2 = \frac{\varepsilon' a^2 b^2 [\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + e \sin T] d T}{\rho [a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Um auch für (F_2) die natürlichen Gleichungen zu erhalten, setzen wir wieder den Wert, der sich für $\sin T$ aus r_2 ergibt, in die obigen Formeln für ρ_2 und $d s_2$ ein.

Es war

$$r_2 = \sqrt{a \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + e \sin T ,$$

woraus folgt

$$\sin T = \frac{r_2^2 - b^2}{2 e r_2}.$$

Wir erhalten also die natürlichen Gleichungen:

$$\rho_2 = \varepsilon \varepsilon' \frac{8^2 a b^2 r_2^4}{\rho \left[4 a^2 r_2^2 - [r_2^2 - b^2]^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \varepsilon' \frac{8\,a^2\,b^2\,r_2^3\,[r_2^2 + b^2]}{\rho\left[4\,a^2\,r_2^2 - [r_2^2 - b^2]^2\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{4\,a^2\,r_2^2 - [r_2^2 + b^2]^2}}.$$

Benutzen wir wieder die oben erwähnten Schraubenlinien als Beispiel, so ist auch hier:

$$\frac{\rho_2}{r_2} = -\,m$$

$$\rho_2 = -\,m\,r_2$$

und:

$$\frac{ds_2}{dr_2} = +\frac{m\,[r_2^2 + b^2]}{\sqrt{4\,a^2\,r_2^2 - [r_2^2 + b^2]^2}},$$

je nachdem die Schraubenlinie rechts- oder linksgewunden ist.

Aus $\frac{\rho_2}{r_2} = -\,m$ folgt wiederum, dass auch (F_2) eine Schraubenlinie ist, und zwar von gleichem Steigwinkel wie (F_1).

§ 7.

Krümmungsmittelpunktskurven der beiden Brennpunktskurven.

Die Krümmungsmittelpunktskurven (Q_1) und (Q_2) von (F_1) und (F_2), zu denen wir uns jetzt wenden, sind, wie oben gezeigt wurde, geodätische Kreise auf der Tangentenfläche von (P).

Ihre Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x_3 &= x + PQ_1\,\alpha \\ y_3 &= y + PQ_1\,\beta \\ z_3 &= z + PQ_1\,\gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_4 &= x - PQ_2\,\alpha \\ y_4 &= y - PQ_2\,\beta \\ z_4 &= z - PQ_2\,\gamma \end{aligned}$$

oder mit den für PQ_1 und PQ_2 oben gefundenen Werten:

$$x_3 = x + \alpha\,e\cos T\left[1 - \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right],$$

$$y_3 = y + \beta\, e \cos T \left[1 - \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right],$$

$$z_3 = z + \gamma\, e \cos T \left[1 - \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right],$$

und

$$x_4 = x - \alpha\, e \cos T \left[1 + \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right],$$

$$y_4 = y - \beta\, e \cos T \left[1 + \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right],$$

$$z_4 = z - \gamma\, e \cos T \left[1 + \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right].$$

Bezeichnen nun x, y, z die laufenden Koordinaten einer beliebigen Raumkurve, gegeben als Funktionen der Bogenlänge, und $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die laufenden Koordinaten der Krümmungsmittelpunktskurve, so ist allgemein:

$$\bar{x} = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$\bar{y} = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$z = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

wenn der Strich die Ableitung nach der Bogenlänge bezeichnet. Kürzer können wir die Gleichungen auch schreiben:

$$\bar{x} = x + r^2 x'', \qquad \bar{y} = y + r^2 y'', \qquad \bar{z} = z + r^2 z''.$$

Nun findet man:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha + 2 r x'' r' + r^2 x'''$$

$$= \alpha + 2 l r' - \alpha - r' l - \frac{r \lambda}{\rho}$$

$$= l r' - \frac{r \lambda}{\rho}.$$

Entsprechend:

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = m r' - \frac{r\mu}{\rho}, \qquad \frac{d\bar{z}}{ds} = n r' - \frac{r\nu}{\rho}.$$

So ergibt sich:

(I) $$\left[\frac{d\bar{s}}{ds}\right]^2 = r'^2 + \frac{r^2}{\rho^2}.$$

Ferner ist:

$$\frac{d^2\bar{x}}{ds\,ds} = \frac{1}{[r^2 + r'^2\rho^2]^{\frac{3}{2}}}\left[\left[-\frac{\alpha r'\rho}{r} + \lambda r''\rho + \lambda r'\rho'\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2r'\lambda - \frac{r}{\rho}\lambda\right][r^2 + r'^2\rho^2] - [\lambda r'\rho - r\lambda][r r' + r' r''\rho^2 + r'^2\rho\rho']\right]$$

und, unter Berücksichtigung der Frenet-Serretschen Formeln:

$$\nu\left[\frac{d^2\bar{x}}{ds\,ds}\right]^2 = \frac{1}{[r^2 + r'^2\rho^2]^3}\left[\left[\frac{\rho^2 r'^2}{r^2} + 4r'^2 + \frac{1}{\rho^2}[r''\rho^2 + r'\rho\rho'\right.\right.$$

$$\left.\left. - r]^2\right][r^2 + r'^2\rho^2]^2 - [r^2 + r'^2\rho^2][r r' + r' r''\rho^2 + r'^2\rho\rho']\right].$$

Für den Zähler dieses Bruches können wir schreiben:

$$[r^2 + r'^2\rho^2]^2\left[\frac{\rho^2 r'^2}{r^2} + 4r'^2 + \frac{1}{\rho^2}[r''\rho^2 + r'\rho\rho' + r]^2 - \frac{4r}{\rho^2}[r''\rho^2\right.$$

$$\left. + r'\rho\rho']\right] - [r^2 + r'^2\rho^2][r r' + r' r''\rho^2 + r'^2\rho\rho']^2$$

$$= [r^2 + r'^2\rho^2]\left\{\frac{\rho^2 r'^2}{r^2}[r^2 + r'^2\rho^2] + \frac{4}{\rho^2}[r^2 + r'^2\rho^2]^2 + \frac{r^2}{r'^2\rho^2}[r r'\right.$$

$$\left. + r' r''\rho^2 + r'^2\rho\rho']^2 - \frac{4r}{r'\rho^2}[r^2 + r'^2\rho^2][r' r''\rho^2 + r'^2\rho\rho' + r r']\right\}$$

$$= [r^2 + r'^2\rho^2]\left\{\frac{\rho^2 r'^2}{r^2}[r^2 + r'^2\rho^2] + \left[\frac{r}{r'\rho}[r r' + r' r''\rho^2 + r'^2\rho\rho']\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{\rho}[r^2 + r'^2\rho^2]\right]^2\right\}.$$

Nun war:

$$\left[\frac{ds}{d\bar{s}}\right]^2 = r'^2 + \frac{r^2}{\rho^2},$$

also

$$r^2 + r'^2\rho^2 = \left[\rho\frac{ds}{d\bar{s}}\right]^2$$

und

$$r r' + r' r''\rho^2 + r'^2\rho\rho' = \frac{1}{2}\frac{d\left[\left(\rho\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2\right]}{ds},$$

so dass wir unter nochmaliger Anwendung der Formel für $\frac{d\bar{s}}{ds}$ schliesslich erhalten:

$$(II) \qquad \frac{1}{\bar{r}^2} = \frac{\rho^2\left\{\frac{\rho^2 r'^2}{r^2}\left[\rho\frac{ds}{d\bar{s}}\right]^2 + \left[\frac{r}{2r'\rho}\frac{d\left[\left(\rho\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2\right]}{ds} - \frac{2}{\rho}\left[\rho\frac{ds}{d\bar{s}}\right]^2\right]^2\right\}}{\left[\rho\frac{ds}{d\bar{s}}\right]^6}.$$

Wir wenden diese Formeln jetzt auf unsere Kurve (Q_1) an. Es war:

$$r_1 = \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T\ ,$$

ferner:

$$\frac{ds_1}{dT} = \frac{\varepsilon' a^2 b^2\left[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T\right]}{\rho\left[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T\right]^{\frac{1}{2}}},$$

also ergibt sich:

$$\left[\frac{dr_1}{ds_1}\right]^2 = \frac{\rho^2 e^2\cos^2 T\left[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T\right]^3}{a^4 b^4\left[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T\right]}.$$

Ausserdem war

$$\rho_1 = \varepsilon\varepsilon'\cdot\frac{a^2 b^2\left[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T\right]}{\left[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}},$$

so dass wir nach Formel (I) erhalten:

$$\left[\frac{ds_3}{ds_1}\right]^2 = \frac{\rho^2\left[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T\right]^3}{a^2 b^4\left[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T\right]}$$

und hieraus:

$$ds_3 = a\left[1 - \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right]dT.$$

Weiter finden wir:

$$\left[\rho_1\frac{ds_3}{ds_1}\right]^2 = a^2\left[1 - \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right]^2$$

und hieraus:

$$\frac{d\left[\left(\rho_1\frac{ds_3}{ds_1}\right)^2\right]}{dT} = -\frac{2a^2 b^2 e\cos T}{\left[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T\right]^2}\left[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T\right]$$

$$\frac{d\left[\left(\rho_1\frac{ds_3}{ds_1}\right)^2\right]}{ds_1} = -\frac{2\varepsilon'\rho e\cos T\left[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T\right]^2}.$$

Wir berechnen jetzt zunächst die einzelnen Ausdrücke in Formel II.

Wir finden:

$$\frac{r_1}{2\,r_1'\,\rho_1}\,\frac{d\left[\left(\rho\,\frac{ds_3}{ds_1}\right)^2\right]}{ds_1} = \varepsilon\varepsilon'\,\frac{\rho\,[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}{[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T]^{\frac{3}{2}}}$$

und:

$$\frac{2}{\rho_1}\left[\rho_1\,\frac{ds_3}{ds_1}\right]^2$$

$$= \varepsilon\varepsilon'\,\frac{2\rho\,[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}\,[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T]}{b^2\,[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T]},$$

also wird der Wert der inneren Klammer im Zähler von Formel II:

$$[-]^2 = \frac{\rho^2\,[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^3}{b^4\,[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T]^3}\,\Big[b^2 - 2\,[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}$$

$$- e\sin T]\,\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}\Big]^2$$

$$= \frac{\rho^2\,[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^3\,[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T]^4}{b^4\,[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T]^3}.$$

Ferner ergibt sich:

$$\frac{\rho_1^2\,r_1'^2}{r_1^2}\left[\rho_1\,\frac{ds_3}{ds_1}\right]^2 = \frac{a^2\,e^2\cos^2 T\,[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T]^2}{[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T]^2}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke alle in Formel (II) ein, so erhalten wir schliesslich:

$$\frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{b^4\,e^2\cos^2 T\,[a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T]}{\rho^2\,[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^3\,[\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} - e\sin T]^2}.$$

Wir berechnen jetzt mit Hilfe der obigen Formeln (I) und (II) auch Bogenelement und Krümmung der Kurve (Q_2). Die Rechnung kann genau analog der oben für (Q_1) angegebenen geführt werden.

Wir erhalten:

$$ds_4 = a\left[1 + \frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}\right]dT,$$

und:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{b^4 e^2 \cos^2 T [a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T]}{\rho^2 [a^2 \cos^2 T + b^2 \sin^2 T]^3 [\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + e \sin T]^2}.$$

§ 8.

Einige weitere Kurven.

Wir bestimmen zunächst die Kurve (O), d. h. die von dem Mittelpunkt O bei der Abrollung beschriebene Kurve.

Es war:

$$x_1 = x + \left[1 - \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right] \left[\alpha e \cos T + l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}\right]$$

$$x_2 = x - \left[1 + \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right] \left[\alpha e \cos T - l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}\right].$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} x_5 &= x + \frac{1}{2} \left\{ \alpha e \cos T - \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} \right. \\ &\quad + l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} - l e \sin T - \alpha e \cos T \\ &\quad \left. - \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} + l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} + l e \sin T \right\} \\ &= x - \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} + l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}. \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir y_5 und z_5, sodass die Gleichungen von (O) lauten:

$$x_5 = x - \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} + l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T},$$

$$y_5 = y - \frac{\beta e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} + m \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T},$$

$$z_5 = z - \frac{\gamma e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}} + n \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}.$$

Da die Kurve (O) bei der Abwicklung der Tangentenfläche von P auf die Ebene in einen Punkt — nämlich eben den Mittelpunkt O — übergeht, sie also eine orthogonale Trajektorie der

Tangentenebenen der Tangentenfläche von (P) ist, so ist diese Tangentenfläche auch für sie Polarfläche, (V) ihre Krümmungsmittelpunktskurve und (P) der Ort der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln.

Nun ist

$$r_5 = OV$$

$$r_5 = \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}.$$

Ferner ist nach obigem auch für (O):

$$\frac{\rho_5}{r_5} = \varepsilon\varepsilon' \frac{r}{\rho}.$$

Hieraus folgt:

$$\rho_5 = \varepsilon\varepsilon' \frac{1}{\rho} \frac{a^2 b^2 \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}{[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ferner ist wieder:

$$dB_5 = \varepsilon\, dT,$$

also:

$$\rho_5 = \varepsilon \frac{ds_5}{dT}$$

und:

$$ds_5 = \varepsilon' \frac{a^2 b^2 \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}}{\rho[a^2\cos^2 T + b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}} dT.$$

Aus:

$$r_5 = \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}$$

folgt nun:

$$\sin^2 T = \frac{r_5^2 - b^2}{e^2},$$

$$\cos^2 T = \frac{a^2 - r_5^2}{e^2},$$

so dass die natürlichen Gleichungen der Kurve (O) lauten:

$$\rho_5 = \varepsilon\varepsilon' \frac{a^2 b^2 r_5}{\rho[a^2 + b^2 - r_5^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$ds_5 = \varepsilon' \frac{a^2 b^2 r_5^2\, dr_5}{\rho[a^2 + b^2 - r_5^2]^{\frac{3}{2}} \sqrt{[r_5^2 - b^2][a^2 - r_5^2]}}.$$

Wir betrachten jetzt die von dem Schnittpunkt R der Tangente mit der grossen Achse erzeugte Kurve (R). Sie ist die bereits erwähnte [1]) gemeinsame Filarevolute der beiden Brennpunktskurven (F_1) und (F_2); ausserdem ist sie die Grat-

[1]) Siehe p. 31.

linie der beim Abrollen durch die grosse Achse beschriebenen Fläche. Da sie bei der Abwicklung der Tangentenfläche auf die Ebene in eine gerade Linie — Verlängerung der grossen Achse — übergeht, so ist sie eine geodätische Linie auf dieser Fläche.

Ihre Gleichungen lauten:

$$x_6 = x + PR\alpha$$
$$y_6 = y + PR\beta$$
$$z_6 = z + PR\gamma.$$

Nun ist:

$$PR = PQ_1 + \cot gT\,[\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T} - e\sin T]$$
$$= \frac{b^2\cot gT}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}},$$

so dass also die Gleichungen lauten:

$$x_6 = x + \frac{b^2\cot gT}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}}\alpha,$$

$$y_6 = y + \frac{b^2\cot gT}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}}\beta,$$

$$z_6 = z + \frac{b^2\cot gT}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}}\gamma.$$

Die Gleichungen der durch den Schnitt S der (Haupt-) Normale in P mit der grossen Achse erzeugten Kurve sind:

$$x_7 = x + PSl$$
$$y_7 = y + PSm$$
$$z_7 = z + PSn.$$

Nun ist:

$$PS = PR\,tgT$$
$$= \frac{b^2}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}},$$

so dass wir haben:

$$x_7 = x + \frac{b^2l}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}},$$

$$y_7 = y + \frac{b^2m}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}},$$

$$z_7 = z + \frac{b^2n}{\sqrt{a^2\sin^2T + b^2\cos^2T}}.$$

§ 9.

Über den konstanten Abstand der beiden Brennpunktskurven.

Es leuchtet schon rein geometrisch ein, dass die beiden Brennpunktskurven (F_1) und (F_2) in entsprechenden Punkten gleichen konstanten Abstand $= 2e$ haben müssen. In der Tat ergibt sich das auch aus den Gleichungen.

Bezeichnet d den Abstand zweier entsprechender Punkte der beiden Kurven, so ist ja:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Nun war:

$$x_1 = x + \left[1 - \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right] \left[\alpha e \cos T + l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}\right],$$

$$x_2 = x - \left[1 + \frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}}\right] \left[\alpha e \cos T - l \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T}\right],$$

also ist

$$x_1 - x_2 = 2 \alpha e \cos T - 2 l e \sin T.$$

Berechnen wir auf analoge Weise $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$, so erhalten wir unter Berücksichtigung der bekannten Formeln

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$
$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$$

tatsächlich

$$d^2 = 4 e^2$$
$$d = 2e.$$

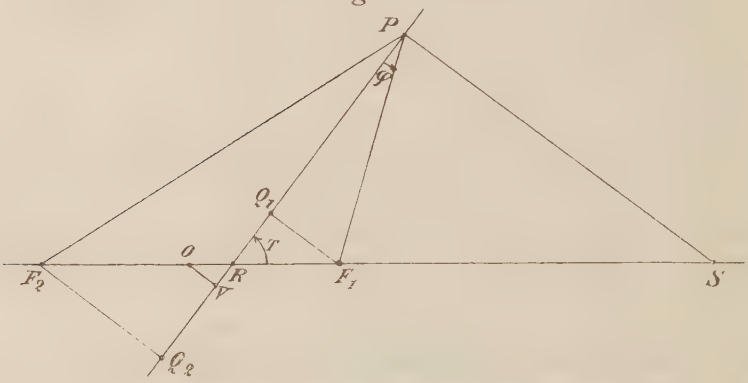
II. Kapitel.

Die mit der windschiefen Hyperbel verbundenen Kurven.

§ 10.

Erste Brennpunktskurve.

Fig. II.



In Figur II stellt P einen Hyperbelpunkt vor, F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte der Hyperbel, Q_1 und Q_2 die beiden Schnittpunkte der in P an die Hyperbel gelegten Tangente mit dem Scheitelkreise, R den Schnittpunkt der Tangente mit der reellen Achse, S den Schnittpunkt der (Haupt-) Normale in P mit der reellen Achse, V den Fusspunkt des Lotes vom Mittelpunkte O auf die Tangente.

Die Kurve (F_1) hat die Gleichungen:

$$x_1 = x + PQ_1\alpha + Q_1F_1 l$$
$$y_1 = y + PQ_1\beta + Q_1F_1 m$$
$$z_1 = z + PQ_1\gamma + Q_1F_1 n.$$

Zur Bestimmung von PQ_1 und Q_1F_1 finden wir, nach Einführung des Winkels φ als Hilfsgrösse, aus der Figur:

$$\begin{aligned} Q_1F_1 &= PF_1\sin\varphi \\ Q_2F_2 &= PF_2\sin\varphi \end{aligned}$$
$$Q_2F_2 - Q_1F_1 = 2a\sin\varphi.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} Q_1F_1 &= RF_1\sin T \\ Q_2F_2 &= RF_2\sin T \end{aligned}$$
$$Q_2F_2 + Q_1F_1 = 2e\sin T,$$

so dass wir erhalten:

$$Q_2 F_2 = e \sin T + a \sin \varphi$$
$$Q_1 F_1 = e \sin T - a \sin \varphi.$$

Nun ist:

$$PQ_1 = Q_1 F_1 \operatorname{cotg} \varphi = e \sin T \operatorname{cotg} \varphi - a \cos \varphi$$
$$PQ_2 = Q_2 F_2 \operatorname{cotg} \varphi = e \sin T \operatorname{cotg} \varphi + a \cos \varphi.$$

Es bleibt noch übrig, den Winkel φ nach T auszudrücken. Dazu finden wir:

$$PQ_2 - PQ_1 = 2a \cos \varphi$$
$$PQ_2 - PQ_1 = RF_1 \cos T + RF_2 \cos T = 2e \cos T,$$

so dass wir erhalten:

$$a \cos \varphi = e \cos T,$$

$$\cos \varphi = \frac{e}{a} \cos T,$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T},$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{e \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}}.$$

Wir haben also:

$$PQ_1 = \frac{e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - e \cos T$$

$$= \frac{e \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} \left[e \sin T - \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \right]$$

$$PQ_2 = \frac{e \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} \left[e \sin T + \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \right]$$

$$Q_1 F_1 = e \sin T - \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T},$$
$$Q_2 F_2 = e \sin T + \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}.$$

Die Gleichungen von (F_1) lauten nun:

$$x_1 = x + \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - 1 \right] \left[\alpha e \cos T + l \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \right],$$

$$y_1 = y + \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - 1 \right] \left[\beta e \cos T + m \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \right],$$

$$z_1 = z + \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - 1 \right] \left[\gamma e \cos T + n \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \right].$$

Für alle folgenden Untersuchungen können wir kurz auf das in § 6 Gesagte verweisen.

Wir finden hier:

$$r_1 = e \sin T - \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}.$$

Ferner ist auch hier:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \varepsilon \varepsilon' \frac{r}{\rho},$$

$$\rho_1 = \varepsilon \frac{d s_1}{d T},$$

worin ε und ε' dieselbe Bedeutung haben, wie in § 6. Wir erhalten also:

$$\rho_1 = - \varepsilon \varepsilon' \frac{a^2 b^2 \left[e \sin T - \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}\right]}{\rho \left[a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$d s_1 = - \varepsilon' \frac{a^2 b^2 \left[e \sin T - \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}\right] d T}{\rho \left[a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Berechnen wir wieder aus

$$r_1 = e \sin T - \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}$$

$\sin T$ durch r_1, setzen dann diesen Wert in die obigen Formeln ein, so erhalten wir als natürliche Gleichungen der Kurve (F_1):

$$\rho_1 = - \varepsilon \varepsilon' \frac{8 a^2 b^2 r_1^4}{\rho \left[4 a^2 r_1^2 - [b^2 + r_1^2]^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d s_1}{d r_1} = - \varepsilon' \frac{8 a^2 b^2 r_1^3 [b^2 - r_1^2]}{\rho \left[4 a^2 r_1^2 - [b^2 + r_1^2]^2\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 a^2 r_1^2 - [b^2 - r_1^2]^2}}.$$

Benutzen wir als Beispiel für eine windschiefe Hyperbel die Schraubenlinien von Seite 20, so erhalten wir hier:

$$\rho_1 = - \varepsilon \varepsilon' m r_1$$

$$\frac{d s_1}{d r_1} = \varepsilon' \frac{m [r_1^2 - b^2]}{\sqrt{4 a^2 r_1^2 - (r_1^2 - b^2)^2}}.$$

Die Entscheidung über den Wert von ε und ε' ist hier nicht so allgemein möglich, wie in § 6, da für die Schraubenlinien auf Seite 20:

$$r < 0$$
$$\rho > 0$$
$$r' < 0$$
$$r'' > 0$$
$$\rho' < 0$$

ist für $m > 0$, d. h. für rechtsgewundene Schraubenlinien,

$$r < 0$$
$$\rho < 0$$
$$r' < 0$$
$$r'' > 0$$
$$\rho' > 0$$

für linksgewundene Schraubenlinien.

Selbstverständlich folgt auch hier wieder aus

$$\frac{\rho_1}{r_1} = -\varepsilon\varepsilon' m ,$$

dass auch (F_1) eine Schraubenlinie ist, deren Steigwinkel gleich dem Komplementwinkel des Steigwinkels von (P), oder um $\frac{\pi}{2}$ grösser als dieser ist.

§ 11.

Zweite Brennpunktskurve.

Die Kurve (F_2) hat die Gleichungen:

$$x_2 = x + PQ_2\,\alpha - Q_2F_2\,l,$$
$$y_2 = y + PQ_2\,\beta - Q_2F_2\,m,$$
$$z_2 = z + PQ_2\,\gamma - Q_2F_2\,n.$$

Die Werte der Grössen PQ_2 und Q_2F_2 haben sich schon im vorigen Abschnitt bei Berechnung der Grössen PQ_1 und Q_1F_1 ergeben. Die obigen Gleichungen lauten also, wenn man diese Werte einsetzt:

$$x_2 = x + \left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} + 1\right]\left[\alpha e\cos T - l\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}\right],$$

$$y_2 = y + \left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} + 1\right]\left[\beta e\cos T - m\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}\right],$$

$$z_2 = z + \left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} + 1\right]\left[\gamma e\cos T - n\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}\right].$$

Stellen wir die weiteren Untersuchungen analog denen im vorigen Paragraphen an, so erhalten wir:

$$r_2 = e\sin T + \sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T},$$

ferner:

$$\frac{\rho_2}{r_2} = \varepsilon\varepsilon' \frac{r}{\rho}$$

und hieraus

$$\rho_2 = -\varepsilon\varepsilon' \frac{a^2 b^2 [e \sin T + \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}}{\rho [a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun

$$\rho_2 = \varepsilon \frac{ds_2}{dT},$$

so finden wir weiter:

$$ds_2 = -\varepsilon' \frac{a^2 b^2 \left[e \sin T + \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}\right] dT}{\rho [a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir erhalten dann die natürlichen Gleichungen von (F_2) auf dieselbe Weise, wie die von (F_1) im vorigen Paragraphen in der Form:

$$\rho_2 = -\varepsilon\varepsilon' \frac{8 a^2 b^2 r_2^4}{\rho \left[4 a^2 r_2^2 - [b^2 + r_2^2]^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{ds_2}{dr_2} = -\varepsilon' \frac{8 a^2 b^2 r_2^3 [r_2^2 - b^2]}{\rho \left[4 a^2 r_2^2 - [b^2 + r_2^2]^2\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 a^2 r_2^2 - [r_2^2 - b^2]^2}}.$$

Bei den Schraubenlinien auf Seite 20 nehmen die natürlichen Gleichungen der Kurve (F_2) die Gestalt an:

$$\rho_2 = -\varepsilon\varepsilon' m r_2$$

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \varepsilon' \frac{m (r_2^2 - b^2)}{\sqrt{4 a^2 r_2^2 - (r_2^2 - b^2)^2}}.$$

§ 12.

Krümmungsmittelpunktskurven der beiden Brennpunktskurven.

Die Krümmungsmittelpunktskurven (Q_1) und (Q_2) von (F_1) und (F_2), die ja, wie am Anfang dieses Abschnitts gezeigt wurde,

geodätische Kreise auf der Tangentenfläche von (P) sind, haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_3 &= x + PQ_1\,\alpha \\ y_3 &= y + PQ_1\,\beta \\ z_3 &= z + PQ_1\,\gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_4 &= x + PQ_2\,\alpha \\ y_4 &= y + PQ_2\,\beta \\ z_4 &= z + PQ_2\,\gamma, \end{aligned}$$

oder nach Einsetzung der Werte für PQ_1 und PQ_2:

$$x_3 = x + \alpha\, e\cos T\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} - 1\right],$$

$$y_3 = y + \beta\, e\cos T\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} - 1\right],$$

$$z_3 = z + \gamma\, e\cos T\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} - 1\right],$$

und:

$$x_4 = x + \alpha\, e\cos T\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} + 1\right],$$

$$y_4 = y + \beta\, e\cos T\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} + 1\right],$$

$$z_4 = z + \gamma\, e\cos T\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} + 1\right].$$

Wir untersuchen zunächst (Q_1). Nach Formel (I) auf Seite 41 ist

$$\left(\frac{ds_3}{ds_1}\right)^2 = r_1'^2 + \frac{r_1^2}{\rho_1^2}.$$

Nun ist:

$$r_1 = e\sin T - \sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T},$$

$$r_1' = \frac{dr_1}{ds_1} = \varepsilon'\frac{\rho\, e\cos T\left[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}},$$

$$\rho_1 = -\varepsilon\varepsilon'\frac{a^2 b^2\left[e\sin T - \sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}\right]}{\rho\left[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Also ergibt sich:

$$\left(\frac{ds_3}{ds_1}\right)^2 = \frac{\rho^2[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T]^3}{a^2 b^4[a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T]}$$

und hieraus

$$ds_3 = a\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} - 1\right] dT.$$

Weiter ergibt sich:

$$\left[\rho_1 \frac{ds_3}{ds_1}\right]^2 = a^2\left[\frac{e\sin T}{\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}} - 1\right]^2$$

$$\frac{d\left[\left(\rho_1 \frac{ds_3}{ds_1}\right)^2\right]}{ds_1} = \varepsilon' \frac{2\rho e\cos T[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}{[a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T]^2}.$$

Um nun nach Formel (II) auf Seite 42 auch $\frac{1}{r_3^2}$ zu erhalten, berechnen wir zunächst die einzelnen Ausdrücke dieser Formel.

Wir finden:

$$\frac{r_1}{2 r_1' \rho_1} \frac{d\left[\left(\rho_1 \frac{ds_3}{ds_1}\right)^2\right]}{ds_1} = -\varepsilon\varepsilon' \frac{\rho[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}{[a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{2}{\rho_1}\left[\rho_1 \frac{ds_3}{ds_1}\right]^2$$

$$= -\varepsilon\varepsilon' \frac{2\rho[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}[e\sin T - \sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}]}{b^2[a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T]}.$$

Es ergibt sich also hier:

$$[-]^2 = \frac{\rho^2[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T]^3}{b^4[a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T]^3}\left[b^2 - 2[e\sin T - \sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}]\sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}\right]^2,$$

$$[-]^2 = \frac{\rho^2[a^2\cos^2 T - b^2\sin^2 T]^3}{b^4[a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T]^3}[e\sin T - \sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}]^4.$$

Ferner erhalten wir:

$$\frac{\rho_1^2 r_1'^2}{r_1^2}\left[\rho_1 \frac{ds_3}{ds_1}\right]^2 = \frac{a^2 c^2\cos^2 T[e\sin T - \sqrt{a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T}]^2}{[a^2\sin^2 T - b^2\cos^2 T]^2}.$$

Setzen wir nun diese Werte ein, so erhalten wir endlich:

$$\frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{b^4 e^2 \cos^2 T \,[a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T]}{\rho^2 [a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]^3 \,[e \sin T - \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}]^2}.$$

Mit Hilfe derselben Formeln erhalten wir auch durch genau analoge Rechnung Bogenelement und Krümmung von (Q_2).

Wir finden:

$$d s_4 = a \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} + 1 \right] dT,$$

$$\frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{b^4 e^2 \cos^2 T \,[a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T]}{\rho^2 [a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]^3 \,[e \sin T + \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}]^2}.$$

---

§ 13.

Einige weitere Kurven.

Wir berechnen wieder zunächst die Kurve (O), d. h. die vom Mittelpunkt O bei der Verbiegung beschriebene Kurve.

Es war:

$$x_1 = x + \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - 1 \right] \left[\alpha e \cos T + l \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \right],$$

$$x_2 = x + \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} + 1 \right] \left[\alpha e \cos T - l \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \right],$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} x_5 = x + \frac{1}{2} \Bigg\{ & \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - \alpha e \cos T + l e \sin T \\ & - l \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} + \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} + \alpha e \cos T \\ & - l e \sin T - l \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T} \Bigg\} \\ = x + & \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - l \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}. \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir y_5 und z_5, so dass die Gleichungen von (O) lauten:

$$x_5 = x + \frac{\alpha e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - l\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T},$$

$$y_5 = y + \frac{\beta e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - m\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T},$$

$$z_5 = z + \frac{\gamma e^2 \sin T \cos T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - n\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}.$$

Über die Kurve (O) gilt hier dasselbe, was auf Seite 44—45 über die Kurve (O) bei der windschiefen Ellipse gesagt ist.

Wir erhalten hier:

$$r_5 = \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T},$$

ferner aus:

$$\frac{\rho_5}{r_5} = \varepsilon\varepsilon' \frac{r}{\rho}$$

$$\rho_5 = -\varepsilon\varepsilon' \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{a^2 b^2 \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}}{[a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun wieder

$$\rho_5 = \varepsilon \frac{ds_5}{dT},$$

so ergibt sich weiter:

$$ds_5 = -\varepsilon' \frac{a^2 b^2 \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}\, dT}{\rho\, [a^2 \cos^2 T - b^2 \sin^2 T]^{\frac{3}{2}}}.$$

Berechnen wir wieder $\sin T$ und $\cos T$ aus

$$r_5 = \sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T},$$

so erhalten wir schliesslich die natürlichen Gleichungen der Kurve (O) in der Form:

$$\rho_5 = -\varepsilon\varepsilon' \frac{a^2 b^2 r_5}{\rho\,[a^2 - b^2 - r_5^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$ds_5 = -\varepsilon' \frac{a^2 b^2 r_5^2\, dr_5}{\rho\,[a^2 - b^2 - r_5^2]^{\frac{3}{2}} \sqrt{[r_5^2 + b^2][a^2 - r_5^2]}}.$$

Für die Kurve (R), für die wir im übrigen auch wieder auf Seite 45—46 verweisen können, erhalten wir die Gleichungen:

$$x_6 = x + \frac{b^2 \operatorname{cotg} T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} \alpha,$$

$$y_6 = y + \frac{b^2 \cot g\, T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}}\,\beta,$$

$$z_6 = z + \frac{b^2 \cot g\, T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}}\,\gamma.$$

Stellen wir auch wieder für die Kurve (S) die Gleichungen auf, so haben wir hier:

$$x_7 = x + \frac{b^2 l}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}},$$

$$y_7 = y + \frac{b^2 m}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}},$$

$$z_7 = z + \frac{b^2 n}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}}.$$

§ 14.

Über den konstanten Abstand der beiden Brennpunktskurven.

Auch bei der windschiefen Hyperbel erhellt schon rein geometrisch, dass der Abstand der beiden Brennpunktskurven (F_1) und (F_2) konstant $= 2e$ sein muss.

Auch hier lässt sich dies aus den Gleichungen erkennen. Es war:

$$x_1 = x + \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} - 1\right]\left[\alpha e \cos T + l\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}\right]$$

$$x_2 = x + \left[\frac{e \sin T}{\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}} + 1\right]\left[\alpha e \cos T - l\sqrt{a^2 \sin^2 T - b^2 \cos^2 T}\right],$$

so dass wir finden:

$$x_1 - x_2 = -2\alpha e \cos T + 2 l e \sin T.$$

Berechnet man auf gleiche Weise auch $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ und setzt diese Ausdrücke in die Formel

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

ein, so erhält man in der Tat:

$$d^2 = 4e^2$$

$$d = 2e.$$

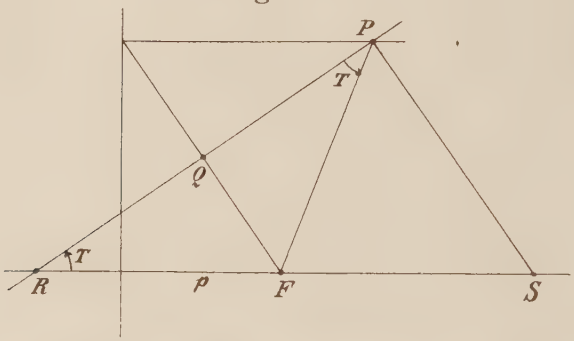
III. Kapitel.

Die mit der windschiefen Parabel verbundenen Kurven.

§ 15.

Brennpunktskurve.

Fig. III.



In Figur III. bedeutet P einen Parabelpunkt, F den Brennpunkt der Parabel, Q den Schnittpunkt der Tangente in P mit der Scheiteltangente, R den Schnittpunkt der Tangente mit der Hauptachse, S den Schnittpunkt der (Haupt-) Normale in P mit der Hauptachse.

Die Kurve (F) hat die Gleichungen:

$$x_1 = x + PQ\,\alpha + QF\,l$$
$$y_1 = y + PQ\,\beta + QF\,m$$
$$z_1 = z + PQ\,\gamma + QF\,n.$$

Nun erhalten wir aus der Figur:

$$QF = \frac{p}{2\sin T}$$

und

$$PQ = QF\cot g\,T = \frac{p\cos T}{2\sin^2 T}.$$

Wir erhalten also die Gleichungen in der Form:

$$x_1 = x + \frac{p\cos T}{2\sin^2 T}\alpha + \frac{p}{2\sin T}\,l$$

oder:

$$x_1 = x + \frac{p}{2\sin^2 T}[\alpha\cos T + l\sin T],$$

$$y_1 = y + \frac{p}{2 \sin^2 T} [\beta \cos T + m \sin T],$$

$$z_1 = z + \frac{p}{2 \sin^2 T} [\gamma \cos T + n \sin T].$$

Auch hier gilt für die Kurve (F) das auf Seite 30—31 Gesagte.

Wir finden:

$$r_1 = \frac{p}{2 \sin T}$$

und nach der Formel:

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \varepsilon\varepsilon' \frac{r}{\rho},$$

da $$r = -\frac{p}{\sin^3 T}$$ (s. S. 22),

$$\rho_1 = -\varepsilon\varepsilon' \frac{p^2}{2 \rho \sin^4 T}.$$

Ferner erhalten wir nach der Formel

$$\rho_1 = \varepsilon \frac{ds_1}{dT},$$

$$ds_1 = -\varepsilon' \frac{p^2}{2 \rho \sin^4 T} dT.$$

Aus

$$r_1 = \frac{p}{2 \sin T}$$

ergibt sich nun

$$\sin T = \frac{p}{2 r_1},$$

so dass wir als natürliche Gleichungen der Kurve (F) erhalten:

$$\rho_1 = -\varepsilon\varepsilon' \frac{8 r_1^4}{\rho p^2},$$

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \varepsilon' \frac{8 r_1^3}{p \rho \sqrt{4 r_1^2 - p^2}}.$$

Wir wollen als Beispiel die auf Seite 22 berechneten Schraubenlinien benutzen. Für sie ist wieder:

$$\frac{r}{\rho} = -m.$$

Nun ist

$$r = -\frac{p}{\sin^3 T},$$

also

$$\rho = \frac{p}{m \sin^3 T};$$

ferner:

$$r' = -3 \operatorname{cotg} T$$

$$r'' = -\frac{3 \sin T}{p}$$

$$\rho' = \frac{3 \operatorname{cotg} T}{m}.$$

Ist nun $m > 0$, d. h. die Schraubenlinie rechtsgewunden, so folgt:

$$\varepsilon = -1$$

$$\varepsilon' = +1,$$

ist $m < 0$, d. h. die Schraubenlinie linksgewunden,

$$\varepsilon = +1$$

$$\varepsilon' = -1.$$

In beiden Fällen ist also:

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{1}{m}$$

$$\rho_1 = m r_1.$$

Dagegen ist:

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \pm \frac{m p}{\sqrt{4 r_1^2 - p^2}};$$

je nachdem die Schraubenlinie rechts- oder linksgewunden ist.

Selbstverständlich folgt aus $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{1}{m}$ wieder, dass auch (F) eine Schraubenlinie ist, und zwar ist die Richtung ihrer Tangenten senkrecht zur Richtung der Tangenten von (P), da ihr Steigwinkel um $\frac{\pi}{2}$ grösser ist, als der von (P).

§ 16.

Krümmungsmittelpunktskurve der Brennpunktskurve und zwei weitere Kurven.

Die Krümmungsmittelpunktskurve (Q) von (F) hat die Gleichungen:

$$x_2 = x + PQ\,\alpha$$
$$y_2 = y + PQ\,\beta$$
$$z_2 = z + PQ\,\gamma,$$

oder, wenn wir für PQ den schon oben gefundenen Wert einsetzen:

$$x_2 = x + \frac{p\cos T}{2\sin^2 T}\,\alpha,$$

$$y_2 = y + \frac{p\cos T}{2\sin^2 T}\,\beta,$$

$$z_2 = z + \frac{p\cos T}{2\sin^2 T}\,\gamma.$$

Nun war

$$r_1 = \frac{p}{2\sin T},$$

ferner:

$$\frac{ds_1}{dT} = -\varepsilon'\frac{p^2}{2\rho\sin^4 T}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dr_1}{ds_1} = \varepsilon'\frac{\rho}{p}\sin^2 T\cos T.$$

Nun war ausserdem:

$$\rho_1 = -\varepsilon\varepsilon'\frac{p^2}{2\rho\sin^4 T},$$

so dass wir nach Formel I, Seite 41, erhalten:

$$\left[\frac{ds_2}{ds_1}\right]^2 = \frac{\rho^2}{p^2}\sin^4 T,$$

und hieraus:

$$ds_2 = \frac{p}{2\sin^2 T}\,dT.$$

Wir erhalten weiter:

$$\left(\rho_1\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2 = \frac{p^2}{4\sin^4 T}$$

und

$$\frac{d\left[\left(\rho_1 \frac{d s_2}{d s_1}\right)^2\right]}{d T} = - \frac{p^2 \cos T}{\sin^5 T}$$

$$\frac{d\left[\left(\rho_1 \frac{d s_2}{d s_1}\right)^2\right]}{d s_1} = \varepsilon' \cdot 2 \rho \operatorname{cotg} T .$$

Um nach Formel II, Seite 42, auch die Krümmung von (Q) zu erhalten, berechnen wie wieder zunächst die einzelnen Ausdrücke in dieser Formel. Es ergibt sich:

$$\frac{r_1}{2 r_1' \rho_1} \frac{d\left[\left(\rho_1 \frac{d s_2}{d s_1}\right)^2\right]}{d s_1} = - \varepsilon \varepsilon' \rho ,$$

$$\frac{2}{\rho_1}\left[\rho_1 \frac{d s_2}{d s_1}\right]^2 = - \varepsilon \varepsilon' \rho ,$$

so dass also hier der ganze innere Klammerausdruck in Formel II $= 0$ wird.

Die Formel lautet nun:

$$\frac{1}{r_2^2} = \frac{\rho_1^4 r_1'^2}{r_1^2 \left[\rho_1 \frac{d s_2}{d s_1}\right]^4},$$

$$= \frac{r_1'^2}{r_1^2 \left(\frac{d s_2}{d s_1}\right)^4}$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{r_2} = \pm \frac{2 \operatorname{cotg} T}{\rho} .$$

Für die Kurve R, für die im übrigen wieder die Ausführungen auf Seite 45—46 gelten, erhalten wir die Gleichungen:

$$x_3 = x + P R \alpha,$$
$$y_3 = y + P R \beta,$$
$$z_3 = z + P R \gamma,$$

oder:

$$x_3 = x + \frac{p \cos T}{\sin^2 T} \alpha,$$

$$y_3 = y + \frac{p \cos T}{\sin^2 T} \beta,$$

$$z_3 = z + \frac{p \cos T}{\sin^2 T} \gamma.$$

Die Gleichungen der Kurve (S) sind:

$$x_4 = x + P S l$$
$$y_4 = y + P S m$$
$$z_4 = z + P S n,$$

oder

$$x_4 = x + \frac{p l}{\sin T}$$

$$y_4 = y + \frac{p m}{\sin T}$$

$$z_4 = z + \frac{p n}{\sin T}.$$

Am Schlusse meiner Arbeit erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Gutzmer, für die freundliche Anregung zu diesen Untersuchungen und die liebenswürdige Unterstützung bei ihrer Ausführung meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Desgleichen möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Salkowski, Charlottenburg, herzlich für die wertvollen Ratschläge danken, die er mir bei der Ausführung meiner Arbeit gegeben hat.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 5

Abschnitt I. Ableitung der Gleichungen für die windschiefen Kegelschnitte.

§ 1. Erste Methode zur Aufstellung der Gleichungen . . 10

§ 2. Zweite Methode zur Aufstellung der Gleichungen

A. Für die windschiefe Ellipse 14

B. Für die windschiefe Hyperbel 19

C. Für die windschiefe Parabel 20

§ 3. Beispiel 26

Abschnitt II. Die windschiefen Kegelschnitte als Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte für bestimmte Kurven.

§ 4. Einleitung 30

I. Kapitel. Die mit der windschiefen Ellipse verbundenen Kurven.

§ 5. Erste Brennpunktskurve 32

§ 6. Zweite Brennpunktskurve 37

§ 7. Krümmungsmittelpunktskurven der beiden Brennpunktskurven 39

§ 8. Einige weitere Kurven 44

§ 9. Über den konstanten Abstand der beiden Brennpunktskurven 47

II. Kapitel. Die mit der windschiefen Hyperbel verbundenen Kurven.

§ 10. Erste Brennpunktskurve 48

§ 11. Zweite Brennpunktskurve 51

§ 12. Krümmungsmittelpunktskurven der beiden Brennpunktskurven 52

Seite
§ 13. Einige weitere Kurven 55
§ 14. Über den konstanten Abstand der beiden Brennpunktskurven 57
III. Kapitel. Die mit der windschiefen Parabel verbundenen Kurven.
§ 15. Brennpunktskurve 58
§ 16. Ihre Krümmungsmittelpunktskurve und zwei weitere Kurven 61

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Fritz Karl Hans Kössler, evangelischen Bekenntnisses, als Sohn des Lithographen Albert Kössler am 20. April 1890 zu Magdeburg. Ich bin preussischer Staatsangehöriger. Von Ostern 1896 bis Ostern 1899 besuchte ich die zweite Bürgerschule meiner Vaterstadt und von Ostern 1899 ab das Reformrealgymnasium (jetzige Bismarckschule) daselbst, wo ich Ostern 1908 die Reifeprüfung bestand. Ich wandte mich dann dem Studium der Mathematik, Chemie und Physik zu, dem ich von Ostern 1908 bis Michaelis 1908 in Greifswald, von Michaelis 1908 bis Michaelis 1910 in Göttingen und von Michaelis 1910 ab in Halle oblag. Das examen rigorosum bestand ich am 30. Oktober 1911.

Ich hörte bei folgenden Herren Dozenten:

in Greifswald:

Auwers, Mie, Milch, Thomé;

in Göttingen:

Bousset, Coehn, Koebe, Kötz, Landau, Minkowski, Oldenberg, Pompeckj, Prandtl, Riecke, Runge, Toeplitz, Wallach, Zsigmondy;

in Halle:

Bauch, Dorn, Eberhard, Gutzmer, Krueger, Schmidt, Scupin, Stammler, Uphues, Vorländer, Wangerin.

Alle diese meine verehrten Lehrer mögen meiner dauernden Dankbarkeit gewiss sein.